SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Elvir Baltić

REKURZIVNE MULTIFUNKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučava se pojam rekurzivnih funkcija. Prvo se proučavaju rekurzivne funkcije oblika $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, a zatim rekurzivne funkcije oblika $\mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$, tzv. multifunkcije. Pri tome se ne zahtijeva prethodno poznavanje činjenica iz klasične teorije izračunljivosti.

U prvom poglavlju proučavaju se primitvno rekurzivne funkcije i njihova svojstva te se ujedno dokazuje rekurzivnost nekih poznatih uobičajenih funkcija.

U drugom poglavlju uvodi se pojam rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te se dokazuju neke činjenice vezane za te funkcije koje su potrebne u daljnjem dijelu rada. Nadalje, definira se pojam rekurzivnog skupa te se proučavaju neka svojstva takvih skupova.

U trećem poglavlju proučavaju se funkcije oblika $\mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. Za takve funkcije definira se kada su rekurzivne te kada su rekurzivno omeđene. Posebno, proučavaju se tzv. r.r.o. funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. Navode se neki primjeri takvih funkcija te se dokazuju neki rezultati vezani za takve funkcije.

Poglavlje 1

Primitivno rekurzivne funkcije

Za sve definicije i teoreme uzimat ćemo da je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Definicija 1.0.1. *Neka su funkcije* $z, \ s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takve da je*

$$z(x) = 0, \ s(x) = x + 1, \ x \in \mathbb{N}.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *te* $j \in \{1, ..., n\}$. *Definiramo funkciju* $I_j^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *sa*

$$I_j^n (x_1, ..., x_n) = x_j.$$

Za funkcije $s, \ z$ *i* I_j^n, $n \geq 1$, $j \in \{1, ..., n\}$ *kažemo da su* ***inicijalne funkcije***.

Definicija 1.0.2. *Neka su* $n, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *neka su* $g_1, ..., g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcije te neka je* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *funkcija. Definiramo* $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa*

$$h(x_1, ..., x_k) = f[g_1(x_1, ..., x_k), ..., g_n(x_1, ..., x_k)].$$

Kažemo da je funkcija h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, ..., g_n$.

Definicija 1.0.3. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka su* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ *funkcije. Definiramo* $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *sa:*

$$h(0, \ x_1, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k)$$

$$h(y + 1, x_1, ..., x_k) = g[h(y, x_1, ..., x_k), \ y, \ x_1, ..., x_k].$$

Kažemo da je funkcija h dobivena ***primitivnom rekurzijom*** *od funkcija* f *i* g.

Primjer 1.0.4. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $z_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$z_n(x_1, ..., x_n) = z\left(I_1^n(x_1, ..., x_n)\right)$$

za sve $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$. Iz ovoga zaključujemo da je z_n kompozicija funkcija z i I_1^n.

Definicija 1.0.5. *Definiramo niz skupova $\left(S_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ induktivno na sljedeći način: Neka je*

$$S_0 \text{ skup svih inicijalnih funkcija.}$$

Pretpostavimo da je $p \in \mathbb{N}$ i da smo definirali skup S_p. Definiramo:

$$S_{p+1} = S_p \cup A$$

pri čemu je A skup svih funkcija h koje zadovoljavaju jedno od sljedeća dva svojstva:

1) postoje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i funkcije $f, g_1, ..., g_n \in S_p$ takve da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, ..., g_n$.

2) postoje funkcije $f, g \in S_p$ takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

Za funkciju f kažemo da je ***primitivno rekurzivna*** *ako postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da $f \in S_p$.*

Primjer 1.0.6. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $z_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija iz primjera 1.0.4. Tada je $z_n \in S_1$. Posebno z_n je primitivno rekurzivna funkcija.*

Primjer 1.0.7. *Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$g(a, b, c) = a + 1.$$

Vrijedi

$$g(a, b, c) = s\left(I_1^3(a, b, c)\right).$$

Iz ovoga slijedi da je g kompozicija funkcija s i I_1^3. Stoga je $g \in S_1$. Dakle, g je primitivno rekurzivna funkcija.

Primjer 1.0.8. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$h(y, x) = y + x \text{ za svaki } x, y \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi sljedeće:

$$h(0, x) = x = f(x)$$

pri čemu je $f = I_1^1$. Nadalje:

$$h(y+1,x) = (y+1)+x = (y+x)+1 = h(y,x)+1 = g(h(y,x),y,x)$$

pri čemu je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$g(a,b,c) = a+1.$$

Dakle,

$$h(0,x) = f(x)$$

$$h(y+1,x) = g(h(y,x),y,x)$$

Prema tome h *je dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g. *Imamo* $f \in S_0$ *pa i* $f \in S_1$ $(S_0 \subseteq S_1)$. *Nadalje* $g \in S_1$ *prema primjeru 1.0.7 . Dakle* $f, g \in S_1$ *iz čega slijedi da je* $h \in S_2$*, posebno* h *je primitivno rekurzivna funkcija.*

Primjer 1.0.9. *Neka je* $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$h(y,x) = y \cdot x$$

Vrijedi:

$$h(0,x) = 0 = z(x)$$

$$h(y+1,x) = (y+1)\cdot x = yx + x = h(y,x)+x = g(h(y,x),y,x)$$

pri čemu je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$g(a,b,c) = a+c.$$

Prema tome h *je dobivena prmitivnom rekurzijom od* z *i* g. *Neka je* $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *definirana sa*

$$H(y,x) = y+x.$$

U primjeru 1.0.8 smo vidjeli da je $H \in S_2$. *Vrijedi:*

$$g(a,b,c) = a+c = H(a,c) = H\left(I_1^3(a,b,c), I_3^3(a,b,c)\right).$$

Stoga je g *kompozicija funkcija* H, I_3^3, I_3^3. *Iz ovoga slijedi da je* $g \in S_3$. *Budući da je* h *dobivena primitivnom rekurzijom od* z *i* g *imamo* $h \in S_4$. *Posebno* h *je primitivno rekurzivna funkcija.*

Propozicija 1.0.10. *(1) Neka je* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka su* $f, g_1, ..., g_n$ *primitivno rekurzivne funkcije. Pretpostavimo da je* h *funkcija dobivena kompozicijom funkcija* $f, g_1, ..., g_n$. *Tada je i* h *primitivno rekurzivna funkcija.*

(2) Neka su f i g primitivno rekurzivne funkcije . Pretpostavimo da h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Tada je i h primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. (1) Budući da je f primitvno rekurzivna, postoji neki $q \in \mathbb{N}$ tako da je $f \in S_q$. Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ funkcija g_i je primitivno rekurzivna pa postoji $p_i \in \mathbb{N}$ tako da je $g_i \in S_{p_i}$. Neka je

$$m = \max\{q, p_1, ..., p_n\}.$$

Tada je $q \leq m, p_1 \leq m, ..., p_n \leq m$. Općenito ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da $i \leq j$, onda je $S_i \subseteq S_j$ što slijedi iz činjenice da je $S_p \subseteq S_{p+1}$ za svaki $p \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$S_q \subseteq S_m, S_{p_1} \subseteq S_m, ..., S_{p_n} \subseteq S_m.$$

Iz ovoga slijedi da su $f, g_1, ..., g_n \in S_m$. Tada je $h \in S_{m+1}$. Prema tome h je primitivno rekurzivna funkcija.

(2) Budući da su f i g primitivno rekurzivne, postoje $q, r \in \mathbb{N}$ tako da je $f \in S_q$ i $g \in S_r$. Neka je $p = \max\{q, r\}$. Tada su $f, g \in S_p$ iz čega slijedi $h \in S_{p+1}$. Prema tome h je primitivno rekurzivna funkcija. □

Primjer 1.0.11. *Neka su $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $a \in \mathbb{N}$. Neka je $c_a^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$c_a^n(x_1, ..., x_n) = a.$$

Fiksirajmo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokažimo indukcijom po a da je c_a^n primitivno rekurzivna funkcija.
BAZA: Uočimo da je

$$c_0^n = z_n$$

pri čemu je z_n funkcija iz primjera 1.0.4. Prema tom primjeru z_n je kompozicija funkcija z i I_1^n. Iz propozicije 1.0.10 slijedi da je z_n primitivno rekurzivna funkcija pa je također i c_0^n primitivno rekurzivna funkcija.
PRETPOSTAVKA: Pretpostavimo da c_a^n primitivno rekurzivna funkcija za neki $a \in \mathbb{N}$.
KORAK: Sada imamo:

$$c_{a+1}^n(x_1, ..., x_n) = a + 1 = s(a) = s(c_a^n(x_1, ..., x_n)).$$

Prema tome c_{a+1}^n je dobivena kompozicijom primitivno rekurzivnih funkcija s (inicijalna funkcija sljedbenik) i c_a^n (iz pretpostavke). Iz propozicije 1.0.10 slijedi da je c_{a+1}^n primitivno rekurzivna funkcija.
ZAKLJUČAK: Dakle, pokazali smo da je c_a^n primitivno rekurzivna funkcija za svaki $a \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.0.12. *Neka je $a \in \mathbb{N}$ te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$h(0) = a$$

$$h(y+1) = g(h(y), y)$$

Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$h'(y, x) = h(y).$$

Vrijedi sljedeće:

$$h'(0, x) = h(0) = a = c_a^1(x)$$

$$h'(y+1, x) = h(y+1) = g(h(y), y) = g(h'(y, x), y) = g'(h'(y, x), y, x)$$

pri čemu je c_a^1 funkcija iz primjera 1.0.11 te $g' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$g'(a, b, c) = g(a, b).$$

Imamo dakle:

$$h'(0, x) = c_a^1(x)$$

$$h'(y+1, x) = g'(h'(y, x), y, x).$$

Ovo znači da je h' funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od c_a^1 i g'. Prema primjeru 1.0.11 c_a^1 je primitivno rekurzivna funkcija. Nadalje:

$$g'(a, b, c) = g(a, b) = g\left(I_1^3(a, b, c), I_2^3(a, b, c)\right).$$

Dakle, g' je kompozicija funkcija g, I_1^3, I_2^3 pa iz propozicije 1.0.10 slijedi da je g' primitivno rekurzivna funkcija. Iz iste propozicije pod 2) slijedi da je h' primitivno rekurzivna funkcija. Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$h(y) = h'(y, x).$$

Posebno za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$h(y) = h'(y, 0).$$

Dakle

$$h(y) = h'\left(I_1^1(y), z(y)\right).$$

Prema tome h je kompozicija funkcija h', I_1^1, z pa prema propoziciji 1.0.10 vrijedi da je h primitivno rekurzivna funkcija. □

Primjer 1.0.13. *Neka je pr* $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$pr(y) = \begin{cases} y-1, & \textit{ako je } y \geq 1 \\ 0, & \textit{ako je } y = 0. \end{cases}$$

Dokažimo da je pr primitivno rekurzivna funkcija. Imamo:

$$pr(0) = 0$$

$$pr(y+1) = y\,.$$

Neka je $a = 0$, *te neka je* $g = I_2^2$. *Imamo:*

$$pr(0) = a$$

$$pr(y+1) = g(pr(y), y)\,.$$

Sada iz prethodne propozicije 1.0.12 slijedi da je pr primitivno rekurzivna funkcija.

Lema 1.0.14. *Neka je* $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa:*

$$h(y,x) = \begin{cases} x-y, & \textit{ako je } x \geq y \\ 0, & \textit{ako je } x < y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Tada je h primitivno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je pr funkcija iz prethodnog primjera 1.0.13. Vrijedi:

$$h(0,x) = x$$
$$h(y+1,x) = pr(h(y,x))\,. \tag{1.2}$$

Definirajmo $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa :

$$g(a,b,c) = pr(a).$$

Tada je

$$g(a,b,c) = pr\left(I_1^3(a,b,c)\right)$$

pa je i g kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija po propoziciji 1.0.10, primitivno rekurzivna funkcija . Iz (1.2) slijedi da je:

$$h(0,x) = I_1^1(x)$$

$$h(y+1,x) = g(h(y,x), y, x)).$$

Ovo znači da je h dobivena primitivnom rekurzijom od I_1^1 i g pa je prema propoziciji 1.0.10 (2) i h primitivno rekurzivna funkcija. □

Definicija 1.0.15. *Neka su* $x, y \in \mathbb{N}$. *Definiramo broj* $x \ominus y$ *sa*

$$x \ominus y = \begin{cases} x - y, & \text{ako je } x \geq y \\ 0, & \text{ako je } x < y. \end{cases} \tag{1.3}$$

Za funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \ominus y$ *kažemo da je modificirano oduzimanje.*

Propozicija 1.0.16. *Modificirano oduzimanje je primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Označimo s M modificirano oduzimanje. Neka je h funkcija iz leme 1.0.14. Tada za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$M(x, y) = h(y, x), \text{ tj.}$$
$$M(x, y) = h\left(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)\right).$$

Prema tome M je kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija h, I_2^2, I_1^2 iz čega slijedi da je M primitivno rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.0.17. *Neka je* $k \in \mathbb{N}$ *i* $k \geq 1$ *te neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije* $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivne.*

Dokaz. Neka su $A, B : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $A(y, x) = y + x$ i $B(y, x) = y \cdot x$. Za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(f + g)(x_1, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k) + g(x_1, ..., g_k) = A(f(x_1, ..., x_k), g(x_1, ..., x_k))$$
$$(f \cdot g)(x_1, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k) \cdot g(x_1, ..., x_k) = B(f(x_1, ..., x_k), g(x_1, ..., x_k))$$

Iz ovoga zaključujemo da je funkcija $f + g$ dobivena kompozicijom funkcija A, f i g te da je $f \cdot g$ dobivena kompozicijom funkcija B, f i g. Iz ovoga i činjenice da su A i B primitivno rekurzivne funkcije slijedi da su $f + g$ i $f \cdot g$ primitivno rekurzivne funkcije. □

Primjer 1.0.18. *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$f(x, y) = |x - y|.$$

Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$|x - y| = (x \ominus y) + (y \ominus x).$$

Stoga je

$$f(x, y) = M(x, y) + h(x, y),$$

pri čemu je M modificirano oduzimanje, a h funkcija iz leme 1.0.14. Stoga je

$$f \ = \ M + h$$

pa iz prethodne propozicije slijedi da je f primitivno rekurzivna funkcija.

Definicija 1.0.19. *Neka su $sg, \overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa:*

$$sg\,(y) = \begin{cases} 1, & ako\ je\ y \geq 1 \\ 0, & ako\ je\ y = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\overline{sg}\,(y) = \begin{cases} 0, & ako\ je\ y \geq 1 \\ 1, & ako\ je\ y = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Propozicija 1.0.20. *Funkcije sg i $\overline{sg}$ su primitivno rekurzivne.*

Dokaz. Imamo:

$$\begin{aligned} sg(0) &= 0 \\ sg(y+1) &= 1 = c_1^2(sg(y), y), \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} \overline{sg}(0) &= 1 \\ \overline{sg}(y+1) &= 0 = c_0^2(sg(y), y), \end{aligned}$$

pri čemu su c_1^2 i c_0^2 funkcije iz primjera 1.0.11. Iz propozicije 1.0.12 slijedi da su sg i $\overline{sg}$ primitivno rekurzivne funkcije. □

Primjer 1.0.21. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$f(x,y) \ = \ \min\{x,y\}\,. \tag{1.6}$$

Tvrdimo da je f primitivno rekurzivna funkcija. Uočimo prvo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\min\{x,y\} = x \ominus (x \ominus y). \tag{1.7}$$

Da bismo ovo dokazali razmotrimo dva slučaja:
(1) $x \geq y$. Tada je $\min\{x,y\} \ = \ y$. S druge strane vrijedi:

$$x \ominus (x \ominus y) \ = \ x \ominus (x - y) \ = \ x - (x - y) \ = \ y.$$

(2) $x < y$. Tada je $\min\{x,y\} = x$. S druge strane vrijedi:

$$x \ominus (x \ominus y) \ = \ x \ominus 0 \ = \ x - 0 \ = \ x.$$

Dakle (1.7) vrijedi, tj. $f(x,y) = x \ominus (x \ominus y)$, *za sve* $x, y \in \mathbb{N}$. *Neka je* $M : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *modificirano oduzimanje. Tada je*

$$f(x,y) = M(x, M(x,y)) = M(I_1^2(x,y), M(x,y)).$$

Iz ovoga zaključujemo da je f *kompozicija funkcija* M, I_1^2 *i* M. *Prema tome* f *je primitivno rekurzivna funkcija.*

Primjer 1.0.22. *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$f(x,y) = \max\{x,y\}.$$

Slično prethodnom primjeru dobivamo da je

$$\max\{x,y\} = y + (x \ominus y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$. *Imamo*

$$f(x,y) = y + (x \ominus y) = I_2^2(x,y) + M(x,y),$$

gdje je M *modificirano oduzimanje. Iz ovoga zaključujemo da je* $f = I_2^2 + M$, *pa iz propozicije 1.0.17 slijedi da je* f *primitivno rekurzivna funkcija.*

Definicija 1.0.23. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *funkcija takva da za sve* $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ *postoji* $y \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$g(x_1, ..., x_k, y) = 0.$$

Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa*

$$f(x_1, ..., x_k) = \min\{y \in \mathbb{N} : g(x_1, ..., g_k, y) = 0\}.$$

Kažemo da je funkcija f *dobivena* ***primjenom*** μ ***- operatora*** *na funkciju* g. *Broj*

$$\min\{y \in \mathbb{N} : g(x_1, ..., g_k, y) = 0\}$$

označavamo i sa

$$\mu y(g(x_1, ..., x_k, y) = 0).$$

Dakle

$$f(x_1, ..., x_k) = \mu y(g(x_1, ..., g_k, y) = 0).$$

Primjer 1.0.24. *Neka je* $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$g(x,y) = |x - y|$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$. *Očito za svaki* $x \in \mathbb{N}$ *postoji* $y \in \mathbb{N}$ *tako da je* $g(x, y) = 0$. *Neka je* f *funkcija dobivena primjenom* μ *-operatora na* g. *Tada za svaki* $x \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$f(x) = \mu y(g(x, y) = 0) = \mu y(|x - y| = 0) = x,$$

tj. $f(x) = x$.

Poglavlje 2

Rekurzivne funkcije

Definicija 2.0.25. *Definirajmo induktivno niz skupova $(R_p)_{p\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način. Neka je R_0 skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da smo definirali skup R_p za neki $p \in \mathbb{N}$. Definiramo skup $R_{p+1} = R_p \cup A$ pri čemu je A skup svih funkcija h koje zadovoljavaju jedno od sljedeća tri svojstva:*

(1) postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f, g_1, ..., g_n \in R_p$ takvi da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, ..., g_n$.

(2) postoje $f, g \in R_p$ takvi da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

(3) postoji funkcija $g \in R_p$ takva da je h dobivena primjenom μ - operatora na g.

Uočimo da iz definicije niza $(R_p)_{p\in\mathbb{N}}$ slijedi da je $R_p \subseteq R_{p+1}$ za svaki $p \in \mathbb{N}$. Za funkciju h kažemo da je ***rekurzivna*** *ako postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $h \in R_p$.*

Propozicija 2.0.26. *Svaka primitivno rekurzivna funkcija je rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Dokažimo indukcijom da je $S_p \subseteq R_p$ za svaki $p \in \mathbb{N}$.
BAZA: Očito je $S_0 \subseteq R_0$ jer $S_0 = R_0$.
PRETPOSTAVKA: Pretpostavimo $S_p \subseteq R_p$ za neki $p \in \mathbb{N}$.
KORAK: Tvrdimo da je $S_{p+1} \subseteq R_{p+1}$. Neka je $h \in S_{p+1}$. Tada vrijedi jedno od sljedećeg:

(1) $h \in S_p$

(2) postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f, g_1, ..., g_n \in S_p$ takvi da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, ..., g_n$.

(3) postoje funkcije $f, g \in S_p$ takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

U prvom slučaju imamo da je $h \in R_p$ (jer $S_p \subseteq R_p$) pa je $h \in R_{p+1}$ (jer $R_p \subseteq R_{p+1}$).
U drugom slučaju imamo da su $f, g_1, ..., g_n \in R_p$. Dakle, h je dobivena kompozicijom funkcija koje su iz R_p iz čega slijedi da je $h \in R_{p+1}$.

U trećem slučaju $f, g \in R_p$ pa imamo da je h dobivena primitivnom rekurzijom funkcija koje su u R_p. Iz toga slijedi da je $h \in R_{p+1}$.
U svim slučajevima dobivamo da je $h \in R_{p+1}$. Time smo dokazali da je $S_{p+1} \subseteq R_{p+1}$. Prema tome je $S_p \subseteq R_p$ za svaki $p \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je h primitivno rekurzivna funkcija. Tada postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $h \in S_p$. Iz $S_p \subseteq R_p$ slijedi da je $h \in R_p$. Stoga je h rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.0.27. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g_1, ..., g_n$ rekurzivne funkcije. Pretpostavimo da je funkcija h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, ..., g_n$. Tada je h rekurzivna funkcija.

(2) Neka su f, g rekurzivne funkcije te neka je h funkcija dobivena primitvnom rekurzijom od f i g. Tada je h rekurzivna funkcija.

(3) Neka je g rekurzivna funkcija. Pretpostavimo da je funkcija f dobivena primjenom μ - operatora na g. Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Tvrdnje (1) i (2) dokazujemo analogno kao u propoziciji 1.0.10. Dokažimo treću tvrdnju. Budući da g rekurzivna funkcija, postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da $g \in R_p$. Iz definicije niza skupova $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ slijedi da je $f \in R_{p+1}$. Stoga je f rekurzivna funkcija. □

Primjer 2.0.28. *Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Tada je $a > b$ ako i samo ako je $a \ominus b > 0$ a to vrijedi ako i samo ako je $\overline{sg}(a \ominus b) = 0$. Dakle,*

$$a > b \Leftrightarrow \overline{sg}(a \ominus b) = 0. \tag{2.1}$$

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa

$$g(x, y, k) = \overline{sg}((k + 1)(y + 1) \ominus x).$$

Prema (2.1) vrijedi da je

$$g(x, y, k) = 0 \Leftrightarrow (k + 1)(y + 1) > x.$$

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Očito je da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(k + 1)(y + 1) > x.$$

Stoga za sve $x, y \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$g(x, y, k) = 0.$$

Neka je f funkcija dobivena primjenom μ - operatora na g. Dakle

$$f(x, y) = \mu k(g(x, y, k) = 0) \text{ tj.}$$

$$f(x, y) = \mu k((k + 1)(y + 1) > x).$$

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. *Neka je*

$$l = f(x, y).$$

Tada je

$$(l + 1)(y + 1) > x.$$

Tvrdimo da je

$$l(y + 1) \leq x.$$

Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$l(y + 1) > x$$

iz čega slijedi da je $l \neq 0$. *Stoga je* $l - 1 \in \mathbb{N}$. *Definirajmo* $k = l - 1$. *Imamo dakle*

$$k \in \mathbb{N}\,,\ k < l \text{ i } (k + 1)(y + 1) = l(y + 1) > x, \text{ tj.}$$

$$(k + 1)(y + 1) > x.$$

Ovo je nemoguće jer je l *najmanji broj iz* $\mathbb{N}$ *takav da je* $(l + 1)(y + 1) > x$. *Dakle,*

$$l(y + 1) \leq x.$$

Iz ovoga te iz $(l + 1)(y + 1) > x$ *slijedi da je*

$$l \leq \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor < l + 1.$$

Stoga je

$$l = \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor.$$

Dakle,

$$f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$.

Tvrdimo da je f *rekurzivna funkcija. Budući da je* f *dobivena primjenom* μ *- operatora na g, prema propoziciji 2.0.27 dovoljno je dokazati da je g rekurzivna funkcija. Iz definicije funkcije* g *je jasno da je* g *kompozicija funkcija* $\overline{sg}$ *i* g_1, *pri čemu je* $g_1 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$g_1(x, y, k) = (k + 1)(y + 1) \ominus x.$$

Stoga je dovoljno dokazati da je g_1 rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$g_1(x, y, k) = M(g_2(x, y, k), I_1^3(x, y, k)),$$

pri čemu je M modificirano oduzimanje, a $g_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g_2(x, y, k) = (k + 1)(y + 1).$$

Dakle g_1 je kompozicija funkcija M, g_2, I_1^3 pa je dovoljno dokazati da je g_2 rekurzivna funkcija. Imamo

$$g_2(x, y, k) = g_3(x, y, k) \cdot g_4(x, y, k),$$

pri čemu su $g_3, g_4 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$g_3(x, y, k) = k + 1 \ , \ g_4(x, y, k) = y + 1.$$

Funkcije g_3 i g_4 su primitivno rekurzivne jer je $g_3 = s \circ I_3^3$ i $g_4 = s \circ I_2^3$. Prema propoziciji 1.0.17 slijedi da je g_2 primitivno rekurzivna funkcija pa je i rekurzivna funkcija. Zaključak: funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$$

je rekurzivna.

Propozicija 2.0.29. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su $f + g$, $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Dokazuje se posve analogno kao u propoziciji 1.0.17. □

Korolar 2.0.30. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq 1$, te neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i $f_1 + ... + f_n$, $f_1 \cdot ... \cdot f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Ova tvrdnja se lako dobiva indukcijom iz propozicije 2.0.29. □

Definicija 2.0.31. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za S kažemo da je* ***rekurzivan skup*** *u $\mathbb{N}^k$ ako je njegova karakteristična funkcija $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna. Podsjetimo se da ako je X skup i $S \subseteq X$ onda je karakteristična funkcija $\chi_S : X \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in S \\ 0, & \text{ako } x \notin S. \end{cases} \tag{2.2}$$

Uočimo sljedeće: $\mathbb{N}^k$ je rekurzivan skup jer je $\chi_{\mathbb{N}^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija. Nadalje iz istog razloga i $\emptyset$ je rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$.

Primjer 2.0.32. *Jednočlan skup* $\{0\}$ *je rekurzivan u* $\mathbb{N}$. *Naime za svaki* $x \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\chi_{\{0\}}(x) = \begin{cases} 1, & ako\ je\ x = 0 \\ 0, & ako\ je\ x \geq 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

iz čega zaključujemo da je

$$\chi_{\{0\}} = \overline{sg},\ tj.\ \chi_{\{0\}}\ je\ rekurzivna\ funkcija.$$

Propozicija 2.0.33. *Neka je* $a \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\{a\}$ *rekurzivan skup u* $\mathbb{N}$.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\chi_{\{a\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = a \\ 0, & \text{ako je } x \neq a \end{cases} = \overline{sg}(|x - a|). \tag{2.4}$$

Stoga je $\chi_{\{a\}}$ kompozicija funkcija $\overline{sg}$ i f gdje je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$f(x) = |x - a|.$$

Neka je $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:

$$A(x, y) = |x - y|.$$

Funkcija A je primitivno rekurzivna prema primjeru 1.0.18. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$f(x) = A(x, a) = A(I_1^1(x), c_a^1(x)),$$

pri čemu je funkcija C_a^1 iz primjera 1.0.11. Iz ovoga slijedi da je f kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija rekurzivna funkcija, a iz istog razlog razloga slijedi da je $\chi_{\{a\}}$ primitivno rekurzivna funkcija. Dakle $\{a\}$ je rekurzivan skup. □

Propozicija 2.0.34. *Neka je* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ *te neka je* $a \in \mathbb{N}^k$. *Tada je* $\{a\}$ *rekurzivan skup u* $\mathbb{N}^k$.

Dokaz. Imamo $a = (a_1, ..., a_k)$, gdje su $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}$. Neka su $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$. Tada je:

$$\chi_{\{a\}}(x_1, ..., x_k) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_1 = a_1, ..., x_k = a_k \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Stoga je:

$$\chi_{\{a\}}(x_1, ..., x_k) = \chi_{\{a_1\}}(x_1) \cdot ... \cdot \chi_{\{a_k\}}(x_k) = f_1(x_1, ..., x_k) \cdot ... \cdot f_k(x_1, ..., x_k),$$

pri čemu je za $i \in \{1, ..., k\}$ funkcija $f_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$f_i(x_1, ..., x_k) = \chi_{\{a_i\}}(I_i^k(x_1, ..., x_k)).$$

Prema prethodnoj propoziciji $\{a_i\}$ je rekurzivan skup u $\mathbb{N}$ pa je $\mathcal{X}_{a_{\{i\}}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija za svaki $i \in \{1, ..., k\}$. Stoga je f_i kao kompozicija rekurzivnih funkcija i sama rekurzivna funkcija. Vidjeli smo da je $\mathcal{X}_{\{a\}} = f_1 \cdot ... \cdot f_k$ pa iz korolara 2.0.30 slijedi da je $\mathcal{X}_{\{a\}}$ rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 2.0.35. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ te neka su S i T rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$. Tada su i skupovi $S \cap T$, $S \cup T$ i S^c rekurzivni u $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Vrijedi

$$\mathcal{X}_{S \cap T}(x) = \mathcal{X}_S(x) \cdot \mathcal{X}_T(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga je

$$\mathcal{X}_{S \cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$$

pa iz propozicije 2.0.29 slijedi da je $\mathcal{X}_{S \cap T}$ rekurzivna funkcija. Stoga je $S \cap T$ rekurzivan skup. Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\mathcal{X}_{S \cup T}(x) = \mathrm{sg}(\mathcal{X}_S(x) + \mathcal{X}_T(x)).$$

Stoga je $\mathcal{X}_{S \cup T}$ kompozicija funkcija sg i $\mathcal{X}_S + \mathcal{X}_T$ pa slijedi da je $\mathcal{X}_{S \cup T}$ rekurzivna funkcija. Dakle $S \cup T$ je rekurzivan skup. Vrijedi

$$\mathcal{X}_{S^c}(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\mathcal{X}_S(x)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga je $\mathcal{X}_{S^c}$ kompozicija funkcija $\overline{\mathrm{sg}}$ i $\mathcal{X}_S$. Dakle S^c je rekurzivan skup. □

Propozicija 2.0.36. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka su $S_1, ..., S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$ te neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x \in S_i$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{ ako } x \in S_1, \\ \vdots \\ f_n(x), \text{ ako } x \in S_n, \end{cases}$$

gdje je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ očito vrijedi:

$$f(x) = f_1(x) \cdot \mathcal{X}_{S_1}(x) + ... + f_n(x) \cdot \mathcal{X}_{S_n}(x) = (f_1 \cdot \mathcal{X}_{S_1})(x) + ... + (f_n \cdot \mathcal{X}_{S_n})(x)$$

dakle $f = f_1 \cdot \mathcal{X}_{S_1} + ... + f_n \cdot \mathcal{X}_{S_n}$. Po propoziciji 2.0.29 i korolaru 2.0.30 funkcija f je rekurzivna. □

Propozicija 2.0.37. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$g(y, x_1, ..., x_k) = \sum_{i=0}^{y} f(i, x_1, ..., x_k),$$

$y, x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$. Tada je g rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka su $y,\ x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$g(0, x_1, ..., x_k) = f(0, x_1, ..., x_k) \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} g(y+1, x_1, ..., x_k) &= \sum_{i=0}^{y+1} f(i, x_1, ..., x_k) = \sum_{i=0}^{y} f(i, x_1, ..., x_k) + f(y+1, x_1, ..., x_k) \\ &= g(y, x_1, ..., x_k) + f(y+1, x_1, ..., x_k). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$F(x_1, ..., x_k) = f(0, x_1, ..., x_k)$$

te funkciju $H : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ sa

$$H(a, y, x_1, ..., x_k) = a + f(y+1, x_1, ..., x_k).$$

Tada iz (2.6) i (2.7) slijedi

$$g(0, x_1, ..., x_k) = F(x_1, ..., x_k)$$

$$g(y+1, x_1, ..., x_k) = H(g(y, x_1, ..., x_k), y, x_1, ..., x_k)$$

Prema tome g je dobivena primitivnom rekurzijom od F i H. Imamo:

$$F(x_1, ..., x_k) = f(0, x_1, ..., x_k) = f(c_0^k(x_1, ..., x_k), I_1^k(x_1, ..., x_k), ..., I_k^k(x_1, ..., x_k))$$

pri čemu je c_0^k funkcija iz primjera 1.0.11. Stoga je F kompozicija funkcija $f, c_0^k, I_1^k, ..., I_k^k$, iz čega slijedi da je F rekurzivna funkcija. Nadalje za sve $a, y, x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$H(a, y, x_1, ..., x_k) = a + f(y+1, x_1, ..., x_k) = I_1^{k+2}(a, y, x_1, ..., x_k) + f'(a, y, x_1, ..., x_k)$$

pri čemu je $f' : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f'(a, y, x_1, ..., x_k) = f(y+1, x_1, ..., x_k).$$

Dakle $H = I_1^{k+2} + f'$. Stoga ako je f' rekurzivna funkcija onda je i H rekurzivna funkcija. Vrijedi:

$$f'(a, y, x_1, ..., x_k) = f((s \circ I_2^{k+2})(a, y, x_1, ..., x_k), I_3^{k+2}(a, y, x_1, ..., x_k), ..., I_{k+2}^{k+2}(a, y, x_1, ...x_k))$$

pa je f' kao kompozicija rekurzivnih funkcija i sama rekurzivna funkcija. Stoga je i H rekurzivna funkcija. Budući da je g dobivena primitivnom rekurzijom od F i H, imamo da je g rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.0.38. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$h(a, b, x_1, ..., x_k) = \begin{cases} \sum_{i=a}^{b} f(i, x_1, ..., x_k), & \text{ako je } a \le b \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka su $a, b, x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo $1 \le a \le b$. Tada je

$$h(a, b, x_1, ..., x_k) = \sum_{i=a}^{b} f(i, x_1, ..., x_k) = \sum_{i=0}^{b} f(i, x_1, ..., x_k) - (\sum_{i=0}^{a-1} f(i, x_1, ..., x_k))$$

dakle

$$h(a, b, x_1, ..., x_k) = \sum_{i=0}^{b} f(i, x_1, ..., x_k) \ominus (\sum_{i=0}^{a \ominus 1} f(i, x_1, ..., x_k)) \cdot \mathrm{sg}(a). \tag{2.9}$$

Uočimo da (2.9) vrijedi i za $a = 0$ te također i kada je $a > b$. Prema tome (2.9) vrijedi za sve $a, b, x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana kao u prethodnoj propoziciji. Tada iz (2.9) slijedi da za sve $a, b, x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$h(a, b, x_1, ..., x_k) = g(b, x_1, ..., x_k) \ominus (g(a \ominus 1, x_1, ..., x_k) \cdot \mathrm{sg}(a)) \tag{2.10}$$

Neka je M modificirano oduzimanje, te neka su $G_1, G_2 : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$G_1(a, b, x_1, ..., x_k) = g(b, x_1, ..., x_k)$$

$$G_2(a, b, x_1, ..., x_k) = g(a \ominus 1, x_1, ..., x_k) \cdot \mathrm{sg}(a)$$

Iz (2.10) slijedi da je

$$h(a, b, x_1, ..., x_k) = M(G_1(a, b, x_1, ..., x_k), G_2(a, b, x_1, ..., x_k)).$$

Stoga je dovoljno dokazati da su G_1 i G_2 rekurzivne funkcije. Imamo

$$G_1(a, b, x_1, ..., x_k) = g(I_2^{k+2}(a, b, x_1, ..., x_k), ..., I_{k+2}^{k+2}(x_1, ..., x_k)).$$

Stoga je G_1 rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Imamo $G_2 = G_3 \cdot G_4$, gdje su $G_3,\ G_4 \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$G_3(a, b, x_1, ..., x_k) = g(a \ominus 1, x_1, ..., x_k)$$

$$G_4(a, b, x_1, ..., x_k) = \mathrm{sg}(a).$$

Uočimo da je $a \ominus 1 = pr(a)$, gdje je pr funkcija iz primjera 1.0.13. Stoga je

$$G_3(a, b, x_1, ..., x_k) = g((pr \circ I_1^{k+2})(a, b, x_1, ..., x_k), I_3^{k+2}(a, b, x_1, ..., x_k), ..., I_{k+2}^{k+2}(a, b, x_1, ..., x_k))$$

pa je G_3 rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija. G_4 je rekurzivna jer je $G_4 = \mathrm{sg} \circ I_1^{k+2}$. Slijedi da je G_2 rekurzivna funkcija pa zaključujemo da je h rekurzivna funkcija. □

Teorem 2.0.39. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija te neka su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa*

$$g(x_1, ..., x_k) = \sum_{i=\alpha(x_1,...,x_k)}^{\beta(x_1,...,x_k)} f(i, x_1, ..., x_k)$$

(pri čemu uzimamo da je ta suma jednaka nuli ako je $\alpha(x_1, ..., x_k) > \beta(x_1, ..., x_k)$, tada je g rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je h funkcija iz prethodne propozicije. Tada za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g(x_1, ..., x_k) = h(\alpha(x_1, ..., x_k), \beta(x_1, ..., x_k), x_1, ..., x_k).$$

Prema tome je g kompozicija funkcija $h, \alpha, \beta, I_1^k, ..., I_k^k$. Stoga je g rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.0.40. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$g(y, x_1, ..., x_k) = \prod_{i=0}^{y} f(y, x_1, ..., x_k).$$

Tada je g rekurzivna funkcija.

Dokaz. Ova tvrdnja se dokazuje posve analogno kao tvrdnja propozicije 2.0.37. □

Propozicija 2.0.41. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija definirana sa*

$$h(a, b, x_1, ..., x_k) = \begin{cases} \prod_{i=a}^{b} f(i, x_1, ..., x_k), & \text{ako je } a \leq b \\ 1, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.11}$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$F(i, a, x_1, ..., x_k) = \begin{cases} f(i, x_1, ..., x_k), & \text{ako je } i \geq a \\ 1, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Tada je

$$F(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; f(i, x_1, ...x_k) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(a \ominus i) + \mathrm{sg}(a \ominus i).$$

Iz ovoga slijedi da je $F \;=\; F_1 + F_2$, pri čemu su $F_1, F_2 : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$F_1(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; f(i, x_1, ..., x_k) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(a \ominus i)$$

$$F_2(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; \mathrm{sg}(a \ominus i).$$

Funkcija F_2 je kompozicija funkcija sg i funkcije F_3 definirane sa

$$F_3(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; a \ominus i.$$

Funkcija F_3 je rekurzivna jer je kompozicija modificiranog oduzimanja i funkcija I_2^{k+2} i I_1^{k+2}. Stoga je i F_2 rekurzivna funkcija. Imamo $F_1 \;=\; F_4 \cdot F_5$ gdje su $F_4, F_5 : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$F_4(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; f(i, x_1, ...x_k)$$

$$F_5(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; \overline{\mathrm{sg}}(a \ominus i).$$

Da je F_5 rekurzivna vidimo kao u slučaju funkcije F_2. Funkcija F_4 je kompozicija funkcija $f, I_1^{k+2}, I_3^{k+2}, ..., I_{k+2}^{k+2}$. Stoga je F_4 rekurzivna iz čega slijedi da je i F_1 rekurzivna pa zaključujemo da je F rekurzivna funkcija. Definirajmo funkciju $H : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ sa

$$H(b, a, x_1, ..., x_k) \;=\; \textstyle\prod_{i=0}^{b} F(i, a, x_1, ..., x_k).$$

Prema prethodnoj propoziciji funkcija H je rekurzivna funkcija. Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $b < a$. Tada za svaki $i \in \{0, ..., b\}$ vrijedi $i < a$ pa je $F(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; 1$. Stoga je

$$H(b, a, x_1, ..., x_k) = \prod_{i=0}^{b} F(i, a, x_1, ..., x_k) = 1.$$

Pretpostavimo sada da $a \leq b$. Ako je $a \geq 1$ onda je

$$H(b, a, x_1, ..., x_k) \;=\; \prod_{i=0}^{b} F(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; \prod_{i=0}^{a-1} F(i, a, x_1, ..., x_k) \cdot \prod_{i=a}^{b} F(i, a, x_1, ..., x_k)$$

$$=\; 1 \cdot \prod_{i=a}^{b} F(i, a, x_1, ..., x_k) \;=\; \prod_{i=a}^{b} f(i, x_1, ..., x_k) \;=\; h(a, b, x_1, ..., x_k).$$

Dakle

$$H(b, a, x_1, ..., x_k) \;=\; h(a, b, x_1, ...x_k). \tag{2.13}$$

Uočimo da ovo vrijedi i za $a = 0$. Zaključak: (2.13) vrijedi za svaki $a, b, x_1, ...x_k \in \mathbb{N}$. Iz (2.13) zaključujemo da je h kompozicija funkcija $H, I_2^{k+2}, I_1^{k+2}, I_3^{k+2}, ..., I_{k+2}^{k+2}$. Prema tome h je rekurzivna funkcija. □

Teorem 2.0.42. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa*

$$g(x_1, ..., x_k) = \prod_{i=\alpha(x_1,...,x_k)}^{\beta(x_1,...,x_k)} f(i, x_1, ..., x_k)$$

pri čemu uzimamo da je produkt jednak jedan ako je $\alpha(x_1, ..., x_k) > \beta(x_1, ..., x_k)$. Tada je g rekurzivna funkcija.

Dokaz. Vrijedi

$$g(x_1, ..., x_k) = h(\alpha(x_1, ..., x_k), \beta(x_1, ...x_k), x_1, ...x_k)$$

za sve $x_1, ..x_k \in \mathbb{N}$ pri čemu je h funkcija iz prethodne propozicije. Iz ovoga kao u dokaza teorema 2.0.39 zaključujemo da je g rekurzivna funkcija. □

Poglavlje 3

Rekurzivne multifunkcije

Neka su $k, n \in \mathbb{N}\{\backslash 0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcija (pri tome $\mathscr{P}(X)$ označava partitivni skup od X za neki dani skup X). Za Φ kažemo da je rekurzivna funkcija ako je funkcija $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ definirana sa

$$\overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) = \chi_{\Phi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n)$$

rekurzivna. Uočimo da je $\overline{\Phi}$ karakteristična funkcija skupa:

$$\Big\{(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid (y_1, ..., y_n) \in \Phi(x_1, ..., x_n)\Big\}. \tag{3.1}$$

Prema tome funkcija $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ je rekurzivna ako i samo ako je skup (3.1) rekurzivan.

Napomena 3.0.43. *Općenito ako su X, Y skupovi, za f kažemo da je **multifunkcija** sa X u Y ako je funkcija sa X u $\mathscr{P}(Y)$. Stoga ćemo, ako su $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, za rekurzivnu funkciju*

$$\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$$

*reći da je **rekurzivna multifunkcija** sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{N}^n$.*

Primjer 3.0.44. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcije definirane sa*

$$\Phi(x_1, ..., x_k) = \emptyset,\ \Psi(x_1, ..., x_k) = \mathbb{N}^n,$$

za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$. Tada su Φ i Ψ rekurzivne funkcije. Naime, pripadne funkcije $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ su konstantne funkcije. $\overline{\Phi}$ je konstantna funkcija s vrijednošću 0 a $\overline{\Psi}$ je konstantna funkcija s vrijednošću 1.

Primjer 3.0.45. *Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa*

$$\Phi(x) = \{y \in \mathbb{N} \mid y \leq x\}, \text{tj.}$$

$$\Phi(x) = \{0, ..., x\}.$$

Tada za pripadnu funkciju $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\overline{\Phi}(x, y) = \mathcal{X}_{\Phi(x)}(y) = \mathcal{X}_{\{0,...,x\}}(y) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } y \leq x, \\ 0, \text{ ako je } y > x. \end{cases}$$

Stoga je

$$\overline{\Phi}(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(y \ominus x),$$

tj. $\overline{\Phi}$ je kompozicija funkcije $\overline{\mathrm{sg}}$ i funkcije $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h(x, y) = y \ominus x$. Funkcija h je rekurzivna jer je kompozicija modificiranog oduzimanja i funkcija I_2^2, I_1^2. Prema tome $\overline{\Phi}$ je rekurzivna funkcija pa je i $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ rekurzivna.

Primjer 3.0.46. *Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa*

$$\Phi(x) = \{x\}.$$

Tada je

$$\overline{\Phi}(x, y) = \mathcal{X}_{\Phi(x)}(y) = \mathcal{X}_{\{x\}}(y) = \overline{\mathrm{sg}}(|x - y|).$$

Iz ovoga zaključujemo da je $\overline{\Phi}$ kompozicija funkcije $\overline{\mathrm{sg}}$ i funkcije $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h(x, y) = |x - y|$. Prema primjeru 1.0.18 h je rekurzivna funkcija pa slijedi da je i $\overline{\Phi}$ rekurzivna funkcija, tj. $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ je rekurzivna funkcija.

Propozicija 3.0.47. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ rekurzivna funkcija. Neka je $a \in \mathbb{N}^k$. Tada je $\Phi(a)$ rekurzivan skup u $\mathbb{N}^n$.*

Dokaz. Neka je $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) = \mathcal{X}_{\Phi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n).$$

Tada je $\overline{\Phi}$ rekurzivna funkcija. Neka su $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}$ takvi da je $a = (a_1, ..., a_k)$. Neka su $y_1, ..., y_n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\mathcal{X}_{\Phi(a)}(y_1, ..., y_n) = \mathcal{X}_{\Phi(a_1,...,a_k)}(y_1, ..., y_n) = \overline{\Phi}(a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_k).$$

Dakle,

$$\mathcal{X}_{\Phi(a)}(y_1, ..., y_n) = \overline{\Phi}(a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_n)$$

za sve $y_1, ..., y_n \in \mathbb{N}$. Za $i \in \{1, ..., k\}$ neka je $c_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću a_i. Tada je $\mathcal{X}_{\Phi(a)}$ kompozicija funkcija $\overline{\Phi}$, $c_1, ...c_k$, $I_1^n, ..., I_n^n$. Prema tome $\mathcal{X}_{\Phi(a)}$ je rekurzivna funkcija pa je i $\Phi(a)$ rekurzivan skup. $\square$

Definicija 3.0.48. *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, X skup takav da je $X \neq \emptyset$ i $f : X \to \mathbb{N}^n$. Tada postoje jedinstvene funkcije $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)),$$

za svaki $x \in X$. Tada za $f_1, ..., f_n$ kažemo da su ***koordinatne funkcije*** *od f.*

Definicija 3.0.49. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako su sve koordinatne funkcije $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ od f rekurzivne.*

Uočimo sljedeće: ako su $n, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ i $a \in \mathbb{N}^n$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ funkcija definirana sa $f(x) = a$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, onda je f rekurzivna funkcija; naime, sve koordinatne funkcije od f su konstantne pa su i rekurzivne.

Primjer 3.0.50. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcija definirana sa*

$$\Phi(x_1, ..., x_k) = \{f(x_1, ..., x_k)\}.$$

Tvrdimo da je Φ rekurzivna funkcija. Neka je $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., x_n) = \chi_{\Phi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n).$$

Neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ koordinatne funkcije od f. Za sve $x_1, ...x_k, y_1, ..., y_n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) = \begin{cases} 1, \text{ ako } (y_1, ..., y_n) = f(x_1, ..., x_n), \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ ako } y_1 = f_1(x_1, ..., x_k), ..., y_n = f_n(x_1, ..., x_k), \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$

$$= \overline{\mathrm{sg}}(\,|y_1 - f_1(x_1, ..., x_k)| \cdot ... \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,|y_n - f_n(x_1, ..., x_k)|\,).$$

Za $i \in \{1, ..., n\}$ neka je $F_i : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$F_i(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) = \overline{\mathrm{sg}}\,|y_i - f_i(x_1, ..., x_k)|.$$

Dobili smo dakle da je $\overline{\Phi} = F_1 \cdot ... \cdot F_n$. Dovoljno je pokazati da su $F_1, ..., F_n$ rekurzivne funkcije jer će tada iz korolara 2.0.30 slijediti da je $\overline{\Phi}$ rekurzivna funkcija. Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Funkcija F_i je kompozicija funkcije $\overline{\mathrm{sg}}$ i funkcije $\mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ takve da

$$(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) \longmapsto |y_i - f_i(x_1, ..., x_k)|. \tag{3.2}$$

Stoga je dovoljno dokazati da je funkcija (3.2) rekurzivna. Neka je $a : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$a(x, y) = |x - y|.$$

Funkcija (3.2) je kompozicija funkcija a, I_{k+i}^{k+n} i funkcije $\mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ takve da

$$(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) \longmapsto f_i(x_1, ..., x_k). \tag{3.3}$$

Stoga je dovoljno dokazati da je (3.3) rekurzivna, no to slijedi iz činjenice da je ona kompozicija funkcija $f_i, I_1^{k+n}, ..., I_k^{k+n}$. Prema tome Φ je rekurzivna funkcija.

Propozicija 3.0.51. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je S rekurzivni podskup od $\mathbb{N}^n$. Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcija definirana sa*

$$\Phi(x_1, ...x_k) = S,$$

za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$. Tada je Φ rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) = \chi_{\Phi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n).$$

Vrijedi

$$\overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) = \chi_S(y_1, ..., y_n).$$

Stoga je $\overline{\Phi}$ kompozicija funkcija χ_S i $I_{k+1}^{k+n}, ..., I_{k+n}^{k+n}$. Prema tome je $\overline{\Phi}$ rekurzivna funkcija čime je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 3.0.52. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su Φ, $\Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ rekurzivne funkcije. Funkcije $\Lambda_{1,2,3} : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ definirane sa*

$$\Lambda_1 = \Phi(x) \cup \Psi(x), \quad \Lambda_2(x) = \Phi(x) \cap \Psi(x), \quad \Lambda_3(x) = \Phi(x) \setminus \Psi(x)$$

su rekurzivne.

Dokaz. Neka su $x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\overline{\Lambda_1}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) = \chi_{\Phi(x_1,...,x_k) \cup \Psi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n)$$

$$= \mathrm{sg}(\chi_{\Phi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n) + \chi_{\Psi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n)) = \mathrm{sg}(\overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) + \overline{\Psi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n)),$$

dakle

$$\overline{\Lambda_1} = \mathrm{sg} \circ (\overline{\Phi} + \overline{\Psi}).$$

Prema tome Λ_1 je rekurzivna funkcija. Posve analogno zaključujemo da je

$$\overline{\Lambda_2} = \overline{\Phi} \cdot \overline{\Psi}.$$

Prema tome Λ_2 je rekurzivna funkcija. Nadalje vrijedi

$$\overline{\Lambda_3}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) = \chi_{\Phi(x_1,...,x_k) \setminus \Psi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n)$$

$$= \chi_{\Phi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(\chi_{\Psi(x_1,...,x_k)}(y_1, ..., y_n)) = \overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(\overline{\Psi}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n)).$$

Prema tome je $\overline{\Lambda_3} = \overline{\Phi} \cdot (\overline{\mathrm{sg}} \circ \overline{\Psi})$. Stoga je $\overline{\Lambda_3}$ rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja dokazana. □

Definicija 3.0.53. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Definirajmo $\mathbb{N}^n_m$ kao skup svih $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{N}^n$ takvih da je $y_1 \leq m, ..., y_n \leq m$. Uočimo da je $\mathbb{N}^n_m$ konačan podskup od $\mathbb{N}^n$. Uzimamo $\mathbb{N}^1_m = \{0, ..., m\}$.*

Definicija 3.0.54. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. Kažemo da je Φ **rekurzivno omeđena** funkcija ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi*

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}.$$

*Za φ kažemo da je **rekurzivna međa** od Φ. Za Φ kažemo i da je **rekurzivno omeđena multifunkcija** s $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{N}^n$. Uočimo sljedeće, ako je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ rekurzivno omeđena funkcija onda je $\Phi(x)$ konačan podskup od $\mathbb{N}^n$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Primjer 3.0.55. *Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa*

$$\Phi(x) = \{0, ..., x\}.$$

Tada je Φ rekurzivna omeđena funkcija, naime

$$\Phi(x) = \mathbb{N}^1_x = \mathbb{N}^1_{\varphi(x)}$$

gdje je $\varphi = I^1_1$.

Propozicija 3.0.56. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ rekurzivno omeđene funkcije. Tada su i funkcije $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ definirane sa*

$$\Lambda_1 = \Phi(x) \cup \Psi(x), \quad \Lambda_2(x) = \Phi(x) \cap \Psi(x), \quad \Lambda_3(x) = \Phi(x) \backslash \Psi(x)$$

rekurzivno omeđene.

Dokaz. Neka je φ rekurzivna međa od Φ te neka je ψ rekurzivna međa od Ψ. Neka je $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\Lambda(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}.$$

Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f(a, b) = \max\{a, b\}.$$

Prema primjeru 1.0.22 funkcija f je primitivno rekurzivna. Vrijedi

$$\Lambda(x) = f(\varphi(x), \psi(x))$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ što povlači da je Λ rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija f, φ, ψ. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$\varphi(x) \leq \Lambda(x) \ \text{ i } \ \psi(x) \leq \Lambda(x).$$

Općenito ako su $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ takvi da $m_1 \leq m_2$ onda je $\mathbb{N}^n_{m_1} \subseteq \mathbb{N}^n_{m_2}$. Stoga je

$$\mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \mathbb{N}^n_{\Lambda(x)} \ \text{ i } \ \mathbb{N}^n_{\psi(x)} \subseteq \mathbb{N}^n_{\Lambda(x)}.$$

Iz

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \ \text{ i } \ \Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\psi(x)}$$

slijedi da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\Lambda(x)} \ \text{ i } \ \Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\Lambda(x)}$$

pa je

$$\Phi(x) \cup \Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\Lambda(x)}, \ \text{ tj. } \ \Lambda_1(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\Lambda(x)}.$$

Time smo dokazali da je Λ_1 rekurzivno omeđena. Iz definicije Λ_2 i Λ_3 je očito da je

$$\Lambda_2(x) \subseteq \Phi(x) \ \text{ i } \ \Lambda_3(x) \subseteq \Phi(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga je

$$\Lambda_2(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\Lambda(x)} \ \text{ i } \ \Lambda_3(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\Lambda(x)}.$$

Prema tome Λ_2 i Λ_3 su rekurzivno omeđene funkcije. □

Definicija 3.0.57. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ koja je rekurzivna i rekurzivno omeđena ćemo kraće pisati da je **r.r.o.** funkcija.*

Korolar 3.0.58. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su i funkcije $\Lambda_{1,2,3} : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ definirane sa*

$$\Lambda_1 = \Phi(x) \cup \Psi(x), \ \ \Lambda_2(x) = \Phi(x) \cap \Psi(x), \ \ \Lambda_3(x) = \Phi(x) \setminus \Psi(x)$$

r.r.o funkcije.

Dokaz. Ovo slijedi iz propozicija 3.0.52 i 3.0.56. □

Neka je p prost broj. Definirajmo funkciju $e_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način. Neka je $e_p(0) = 0$, a ako je $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$ neka je $e_p(x)$ eksponent kojim broj p ulazi u rastav od x na proste faktore. Na primjer:

$$e_2(10) = 1, \ \ e_5(100) = 2, \ \ e_7(17) = 0.$$

Uočimo da za prost broj p i $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$ vrijedi

$$e_p(x) = \max \left\{ k \in \mathbb{N} : p^k \mid x \right\}.$$

Propozicija 3.0.59. *Funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa*

$$h(y, x) = x^y$$

je primitivno rekurzivna.

Dokaz. Želimo dokazati da postoje primitivno rekurzivne funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$h(0, x) = f(x) \tag{3.4}$$

$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x). \tag{3.5}$$

Naime to će značiti da je h primitivno rekurzivna jer je dobivena primitivnom rekurzijom od primitivno rekurzivnih funkcija f i g. Vrijedi

$$h(0, x) = 1$$

$$h(y + 1, x) = x^{y+1} = x^y \cdot x = h(y, x) \cdot x$$

Definirajmo $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa

$$g(z, y, x) = z \cdot x.$$

Funkcija g je primitvno rekurzivna kao umnožak funkcija I^3_1 i I^3_3. Imamo

$$h(y + 1, x) = h(y, x) \cdot x = g(h(y, x), y, x).$$

Prema tome vrijedi (3.5). Nadalje neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1. Tada je f primitivno rekurzivna funkcija te očito vrijedi (3.4). Time je propozicija dokazana. □

Lema 3.0.60. *Postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$ vrijedi sljedeće:*

1. *ako $y \mid x$ onda je $g(x, y) = 1$*
2. *ako $y \nmid x$ onda je $g(x, y) = 0$*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y + 1} \right\rfloor.$$

Prema primjeru 2.0.28 funkcija f je rekurzivna. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$. Tada vrijedi:

$$y \mid x \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x = y \cdot k \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } \frac{x}{y} = k \Longleftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{N}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x}{y} = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \Longleftrightarrow x = y \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \Longleftrightarrow x = y \cdot \left\lfloor \frac{x}{(y \ominus 1) + 1} \right\rfloor$$

$$\Longleftrightarrow x = y \cdot f(x, y \ominus 1) \Longleftrightarrow |x - y \cdot f(x, y \ominus 1)| = 0 \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{sg}}(|x - y \cdot f(x, y \ominus 1)|) = 1.$$

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$g(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(|x - y \cdot f(x, y \ominus 1)|).$$

Imamo da za $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$ vrijedi

$$y \mid x \Longleftrightarrow g(x, y) = 1.$$

Prema tome vrijedi

1. ako $y \mid x$ onda je $g(x, y) = 1$
2. ako $y \nmid x$ onda je $g(x, y) = 0$.

Preostaje dokazati da je g rekurzivna. Neka je $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f_1(x, y) = f(x, y \ominus 1).$$

Funkcija f_1 je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija $f,\ I_1^2,\ pr \circ I_2^2$, pri čemu je pr funkcija iz primjera 1.0.13. Neka su $h,\ g_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$h(x, y) = |x - y|\,, \quad g_1(x, y) = |x - y \cdot f(x, y \ominus 1)|\,.$$

Funkcija h je rekurzivna, a g_1 je kompozicija funkcija $h,\ I_1^2$ i $I_2^2 \cdot f_1$ pa je stoga i g_1 rekurzivna. Budući da je $g = \overline{\mathrm{sg}} \circ g_1$, imamo da je g rekurzivna funkcija. □

Propozicija 3.0.61. *Neka je p prost broj. Tada je e_p rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$. Označimo $k = e_p(x)$. Tada vrijedi

$$p^k \mid x,\ p^{k+1} \nmid x.$$

Tvrdimo da je

$$k = \min\left\{y \in \mathbb{N} \mid p^{y+1} \nmid x\right\} \tag{3.6}$$

Kada bi postojao $y \in \mathbb{N}$ takav da $p^{y+1} \nmid x$ i $y < k$ onda bi vrijedilo $y + 1 \leq k$ što bi povlačilo $p^{y+1} \mid x$ pa bismo imali kontradikciju. Dakle (3.6) vrijedi. Neka je g funkcija iz prethodne leme. Tada za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$p^{y+1} \nmid x \Leftrightarrow g(x, p^{y+1}) = 0.$$

Iz ovoga te iz (3.6) zaključujemo da je

$$e_p(x) = \min\left\{y \in \mathbb{N} : g(x, p^{y+1}) = 0\right\}$$

za svaki $x \in \mathbb{N},\ x \geq 1$. Budući da za $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$ i $y \in \mathbb{N}$ očito vrijedi

$$g(x, p^{y+1}) = 0 \Longleftrightarrow x \cdot g(x, p^{y+1}) = 0,$$

imamo sljedeći zaključak:

$$e_p(x) = \min\left\{y \in \mathbb{N} : x \cdot g(x, p^{y+1}) = 0\right\} \tag{3.7}$$

za svaki $x \in \mathbb{N},\ x \geq 1$. No jednakost 3.7 vrijedi i za $x = 0$, dakle za svaki $x \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$G(x, y) = x \cdot g(x, p^{y+1}).$$

Prema (3.7) vrijedi

$$e_p(x) = \mu y(G(x, y) = 0)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$, tj. funkcija e_p je dobivena primjenom μ-operatora na funkciju G. Preostaje još dokazati da je G rekurzivna funkcija. Neka su $f, h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$f(x, y) = p^{y+1},\ h(a, b) = b^a.$$

Funkcija h je rekurzivna prema 3.0.59, a vrijedi

$$f(x, y) = h(y + 1, p)$$

pa zaključujemo da je f rekurzivna kao kompozicija funkcija h, $s \circ I_2^2$ i konstantne funkcije. Funkcija G je produkt funkcije I_1^2 i funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \longmapsto g(x, p^{y+1})$ koja je rekurzivna jer je kompozicija funkcija g, I_1^2, f. Stoga je G rekurzivna funkcija. Zaključak: e_p je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 3.0.62. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je*

$$f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka su $g_1, ..., g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ koordinatne funkcije od g. Tada su $g_1, ..., g_n$ rekurzivne funkcije. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g_1(x), ..., g_n(x)).$$

Prema tome $f \circ g$ je rekurzivna funkcija prema propoziciji 2.0.27 jer je dobivena kompozicijom rekurzivnih funkcija f, $g_1, ..., g_n$. □

Teorem 3.0.63. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija. Tada je skup*

$$\left\{x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) = \emptyset\right\}$$

rekurzivan.

Dokaz. Budući da je Φ rekurzivno omeđena, postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Odaberimo međusobno različite proste brojeve $p_1, ..., p_n$. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ sa

$$g(i) = (e_{p_1}(i), ..., e_{p_n}(i)).$$

Koordinatne funkcije od g su funkcije $e_{p_1}, ..., e_{p_n}$, a one su rekurzivne prema propoziciji 3.0.61. Stoga je g rekurzivna funkcija. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Definirajmo $i = p_1^{y_1} \cdot ... \cdot p_n^{y_n}$. Tada je

$$g(i) = (y_1, ..., y_n),$$

tj. $g(i) = y$. Nadalje, budući da vrijedi $y_1, ..., y_n \leq \varphi(x)$ imamo

$$i = p_1^{y_1} \cdot ... \cdot p_n^{y_n} \leq p_1^{\varphi(x)} \cdot ... \cdot p_n^{\varphi(x)} = (p_1 \cdot ... \cdot p_n)^{\varphi(x)} = q^{\varphi(x)},$$

gdje je $q = p_1 \cdot ... \cdot p_n$. Dakle za svaki $y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \leq q^{\varphi(x)}$ i $y = g(i)$. Neka je $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$a(x) = q^{\varphi(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$h(y, x) = x^y.$$

Funkcija h je rekurzivna prema propoziciji 3.0.59. Vrijedi

$$a(x) = h(\varphi(x), q)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ iz čega zaključujemo da je a rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Imamo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ postoji $i \in \{0, ..., a(x)\}$ takav da je

$$y = g(i).$$

Ovo znači da je

$$\mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) : 0 \leq i \leq a(x)\}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Iz ovoga i iz $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ slijedi da je

$$\Phi(x) \subseteq \{g(i) : 0 \leq i \leq a(x)\}. \tag{3.8}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tvrdimo da vrijedi

$$\Phi(x) = \emptyset \Leftrightarrow g(i) \notin \Phi(x) \text{ za svaki } i \in \{0, ..., a(x)\}. \tag{3.9}$$

Implikacija $\Rightarrow$ je očita. Dokažimo implikaciju $\Leftarrow$. Uzmimo da $g(i) \notin \Phi(x)$ za svaki $i \in \{0, ..., a(x)\}$. Pretpostavimo da je $\Phi(x) \neq \emptyset$. Tada postoji y takav da je $y \in \Phi(x)$. Iz (3.8) slijedi da je $y = g(i)$ za neki $i \in \{0, ..., a(x)\}$. To znači da je $g(i) \in \Phi(x)$ što je kontradikcija. Prema tome $\Phi(x) = \emptyset$ i time smo dokazali da (3.9) vrijedi. Neka je

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) = \emptyset \right\}.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada iz (3.9) slijedi

$$\begin{aligned} x \in S &\Leftrightarrow g(i) \notin \Phi(x) \text{ za svaki } i \in \{0, ..., a(x)\} \\ &\Leftrightarrow \chi_{\varphi(x)}(g(i)) = 0 \text{ za svaki } i \in \{0, ..., a(x)\} \\ &\Leftrightarrow \overline{\Phi}(x, g(i)) = 0 \text{ za svaki } i \in \{0, ..., a(x)\} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{a(x)} \Phi(x, g(i)) = 0. \end{aligned}$$

Neka je $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$b(x) = \sum_{i=0}^{a(x)} \Phi(x, g(i)).$$

Dokazali smo da je

$$x \in S \Leftrightarrow b(x) = 0.$$

Stoga je

$$\chi_S(x) = \overline{\text{sg}}(b(x)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Preostaje još dokazati da je b rekurzivna. Naime tada će χ_S biti rekurzivna kao kompozicija funkcija $\overline{\text{sg}}$ i b što će povlačiti da je S rekurzivan skup čime će tvrdnja biti dokazana. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f(i, x) = \overline{\Phi}(x, g(i)),$$

$i \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{N}^k$, tj.

$$f(i, x_1, ..., x_k) = \overline{\Phi}(x_1, ..., x_k, e_{p_1}(i), ..., e_{p_n}(i)).$$

Vrijedi
$$f = \overline{\Phi} \circ c,$$
gdje je $c : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+n}$ funkcija definirana sa
$$c(i, x_1, ..., x_k) = (x_1, ..., x_k, e_{p_1}(i), ..., e_{p_n}(i)).$$
Neka su $c_1, ..., c_{k+n} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ koordinatne funkcije od c. Imamo
$$c_1 = I_2^{k+1}, ..., c_k = I_{k+1}^{k+1}.$$
$$c_{k+1} = e_{p_1} \circ I_1^{k+1}, ..., c_{k+n} = e_{p_n} \circ I_1^{k+1}.$$
Stoga su $c_1, ..., c_{k+n}$ rekurzivne funkcije pa je i c rekurzivna funkcija. Funkcija $\overline{\Phi}$ je rekurzivna jer je Φ rekurzivna. Iz $f = \overline{\Phi} \circ c$ slijedi da je f rekurzivna prema propoziciji 3.0.62. Iz definicije funkcija f i b slijedi da je
$$b(x) = \sum_{i=0}^{a(x)} f(i, x)$$
za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Prema teoremu 2.0.39 (ako uzmemo da je $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ nulfunkcija i $\beta = a$ te $g = b$) slijedi da je b rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Propozicija 3.0.64. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su Φ, $\Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su skupovi*
$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\right\} \;\; i \;\; T = \left\{x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) = \Psi(x)\right\}$$
rekurzivni.

Dokaz. Uočimo da općenito za proizvoljne skupove A i B vrijedi
$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset.$$
Neka je $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ funkcija definirana sa
$$\Lambda(x) = \Phi(x) \setminus \Psi(x)$$
za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada vrijede sljedeće ekvivalencije
$$x \in S \Leftrightarrow \Phi(x) \subseteq \Psi(x) \Leftrightarrow \Phi(x) \setminus \Psi(x) = \emptyset \Leftrightarrow \Lambda(x) = \emptyset.$$
Prema tome
$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k : \Lambda(x) = \emptyset\right\}.$$

Iz korolara 3.0.58 slijedi da je Λ r.r.o. funkcija te prema prethodnom teoremu vrijedi da je S rekurzivan skup. Neka je

$$S' = \left\{x \in \mathbb{N}^k : \Psi(x) \subseteq \Phi(x)\right\}.$$

Prema dokazanom S' je rekurzivan skup. Vrijedi

$$S \cap S' = \left\{x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) = \Psi(x)\right\} = T.$$

Stoga je T rekurzivan skup kao presjek dva rekurzivna skupa. □

Teorem 3.0.65. *Neka su $k, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Definiramo $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ sa*

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je Λ r.r.o. funkcija.

Dokaz. Budući da su Φ i Ψ rekurzivno omeđene funkcije, postoje rekurzivne funkcije $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $\psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \text{ i } \Psi(y) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(y)} \tag{3.10}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}^n$. Odaberimo međusobno različite proste brojeve $p_1, ..., p_n$. Definirajmo funkcije $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$g(i) = (e_{p_1}(i), ..., e_{p_n}(i)), \ i \in \mathbb{N},$$

$$a(x) = (p_1 \cdot ... \cdot p_n)^{\varphi(x)}, \ x \in \mathbb{N}^k.$$

U dokazu prethodnog teorema smo vidjeli da su g i a rekurzivne funkcije te da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid 0 \leq i \leq a(x)\}. \tag{3.11}$$

Definirajmo funkciju $\lambda : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{a(x)} \psi(g(i)).$$

Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f(i, x_1, ..., x_k) = (\psi \circ g)(i).$$

Funkcija f je rekurzivna jer je dobivena kompozicijom funkcija $\psi \circ g$ i I_1^{k+1} ($\psi \circ g$ je rekurzivna prema propoziciji 3.0.62). Neka je $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ nul-funkcija te neka je $\beta = a$. Iz definicije funkcije λ je jasno da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\lambda(x_1, ..., x_k) = \sum_{i=\alpha(x_1,...,x_k)}^{\beta(x_1,...,x_k)} f(i, x_1, ..., x_k).$$

Iz teorema 2.0.39 slijedi da je λ rekurzivna funkcija. Iz definicije funkcije λ je jasno da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \{0, ..., a(x)\}$ vrijedi

$$\psi(g(i)) \leq \lambda(x).$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$. Iz (3.11) slijedi da postoji $i \in \{0, ..., a(x)\}$ takav da je

$$y = g(i).$$

Tada je

$$\psi(y) = \psi(g(i))$$

pa je

$$\psi(y) \leq \lambda(x).$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ vrijedi

$$\psi(y) \leq \lambda(x). \tag{3.12}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tvrdimo da je

$$\Lambda(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\lambda(x)}. \tag{3.13}$$

Neka je $z \in \Lambda(x)$. Iz definicije od Λ slijedi da je $z \in \Psi(y)$ za neki $y \in \Phi(x)$. Iz (3.10) slijedi da je

$$z \in \mathbb{N}^m_{\psi(y)} \text{ i } y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}.$$

Prema (3.12) vrijedi

$$\psi(y) \leq \lambda(x)$$

pa je

$$\mathbb{N}^m_{\psi(y)} \subseteq \mathbb{N}^m_{\lambda(x)}.$$

Stoga je $z \in \mathbb{N}^m_{\lambda(x)}$. Dokazali smo da vrijedi (3.13). Prema tome Λ je rekurzivno omeđena funkcija. Iz (3.10) i (3.11) slijedi da je

$$\Phi(x) \subseteq \{g(i) : 0 \leq i \leq a(x)\}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $z \in \mathbb{N}^m$. Tada vrijede sljedeće ekvivalencije

$$z \in \Lambda(x) \Leftrightarrow \text{ postoji } y \in \Phi(x) \text{ takav da } z \in \Psi(y) \Leftrightarrow$$

$$\text{postoji } y \in \{g(i) \mid i \in \{0, ..., a(x)\}\} \text{ takav da } z \in \Psi(y) \text{ i } y \in \Phi(x) \Leftrightarrow$$

$$\text{postoji } i \in \{0, ..., a(x)\} \text{ takav da } z \in \Psi(g(i)) \text{ i } g(i) \in \Phi(x) \Leftrightarrow$$

$$\text{postoji } i \in \{0, ..., a(x)\} \text{ takav da } \overline{\Psi}(g(i), z) > 0 \text{ i } \overline{\Phi}(x, g(i)) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{postoji } i \in \{0, ..., a(x)\} \text{ takav da } \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{a(x)} \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)) > 0.$$

Stoga je

$$\overline{\Lambda}(x, z) = \mathrm{sg}(\sum_{i=0}^{a(x)} \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i))).$$

Neka je $L : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$L(x, z) = \sum_{i=0}^{a(x)} \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)), \tag{3.14}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$. Tada je

$$\overline{\Lambda}(x, z) = \mathrm{sg}(L(x, z)) \tag{3.15}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$. Neka su α, $\beta : \mathbb{N}^{k+m} \to \mathbb{N}$ i $F : \mathbb{N}^{k+m+1} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$\alpha(x, z) = 0, \;\; \beta(x, z) = a(x), \;\;\; F(i, x, z) = \overline{\Psi}(g(i), z) \cdot \overline{\Phi}(x, g(i)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$, $i \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$L(x, z) = \sum_{i=\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} F(i, x, z). \tag{3.16}$$

Funkcija α je rekurzivna jer je konstantna. Vrijedi

$$\beta(x, z) = a(p(x, z)),$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$, pri čemu je $p : \mathbb{N}^{k+m} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa

$$p(x, z) = x,$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$. Koordinatne funkcije od p su rekurzivne jer su to projekcije pa je p rekurzivna. Iz $\beta = a \circ p$ slijedi da je β rekurzivna funkcija. Neka su $F_1, \ F_2 : N^{k+m+1} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$F_1(i, x, z) = \overline{\Psi}(g(i), z), \quad F_2(i, x, z) = \overline{\Phi}(x, g(i)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, $z \in \mathbb{N}^m$, $i \in \mathbb{N}$. Funkcija F_1 je kompozicija funkcija $\overline{\Psi}$, $e_{P_1} \circ I_1^{k+m+1}, ..., \ e_{p_n} \circ I_1^{k+m+1}, \ I_{k+2}^{k+m+1}, ..., I_{k+m+1}^{k+m+1}$. Stoga je F_1 rekurzivna funkcija. Analogno zaključujemo da je F_2 rekurzivna funkcija. Imamo $F = F_1 \cdot F_2$ pa slijedi da je F rekurzivna funkcija. Iz (3.15) i teorema 2.0.39 slijedi da je L rekurzivna funkcija. Sada iz (3.15) slijedi da je $\overline{\Lambda}$ rekurzivna funkcija. Prema tome Λ je rekurzivna funkcija. Zaključak: Λ je r.r.o. funkcija. □

Korolar 3.0.66. *Neka su $k, \ n, \ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija, te neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivna funkcija. Neka je $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ funkcija definirana sa*

$$\Lambda(x) = f(\Phi(x)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je Λ r.r.o. funkcija. (Pri tome $f(\Phi(x))$ označava sliku skupa $\Phi(x)$ pri funkciji f, tj. $f(\Phi(x)) = \{f(y) : y \in \Phi(x)\}$.)

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$\Lambda(x) = f(\Phi(x)) = \{f(y) : y \in \Phi(x)\} = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \{f(y)\} = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y),$$

pri čemu je $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ funkcija definirana sa

$$\Psi(y) = \{f(y)\},$$

$y \in \mathbb{N}^n$. Dakle

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga je prema prethodnom teoremu dovoljno dokazati da je Ψ r.r.o funkcija. Prema primjeru 3.0.50 Ψ je rekurzivna. Dokažimo da je i rekurzivno omeđena. Neka su $f_1, ..., f_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ koordinatne funkcije od f. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ sa

$$h(y) = f_1(y) + ... + f_m(y).$$

Tada je h rekurzivna funkcija i za svaki $y \in \mathbb{N}^n$ vrijedi

$$f_1(y) \leq h(y), ..., f_m(y) \leq h(y).$$

Stoga za svaki $y \in \mathbb{N}^n$ imamo

$$(f_1(y), ..., f_m(y)) \in \mathbb{N}^m_{h(y)}, \text{ tj.}$$

$$f(y) \in \mathbb{N}^m_{h(y)}.$$

Dakle

$$\{f(y)\} \subseteq \mathbb{N}^m_{h(y)}, \text{ tj.}$$

$$\Psi(y) \subseteq \mathbb{N}^m_{h(y)}.$$

Prema tome Ψ je rekurzivno omeđena funkcija pa imamo da je Ψ r.r.o. funkcija. Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Primjer 3.0.67. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Definirajmo funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ sa*

$$\Phi(x) = \{f(0), ..., f(x)\}.$$

Tada je Φ r.r.o. funkcija. Naime, neka je $\Psi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\Psi(x) = \{0, ..., x\}.$$

Prema primjerima 3.0.45 i 3.0.55 funkcija Ψ je r.r.o. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(\Psi(x)) = f(\{0, ..., x\} = \{f(0), ..., f(x)\} = \Phi(x).$$

Dakle

$$\Phi(x) = f(\Psi(x))$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$, pa iz prethodnog korolara slijedi da je Φ r.r.o. funkcija.

Primjer 3.0.68. *Općenitije, neka su $k,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $\alpha,\ \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Definirajmo funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ sa*

$$\Phi(x) = \{f(i) : \alpha(x) \leq i \leq \beta(x)\}.$$

Tada je Φ r.r.o. funkcija. Dokažimo ovo. Neka je $\Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana sa

$$\Psi(x) = \{i \in \mathbb{N} : \alpha(x) \leq i \leq \beta(x)\}.$$

Očito je

$$\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}_{\beta(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Prema tome Ψ je rekurzivno omeđena funkcija. Preostaje još pokazati da je Ψ rekurzivna. Za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\overline{\Psi}(x, i) = \chi_{\Psi(x)}(i) = \begin{cases} 1, \textit{ ako } \alpha(x) \leq i \leq \beta(x) \\ 0, \textit{ inače} \end{cases} = \overline{\mathrm{sg}}(\alpha(x) \ominus i) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(i \ominus \beta(x)).$$

Tada je $\overline{\Psi} = F_1 \cdot F_2$ *pri čemu su* $F_1, F_2 : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *funkcije definirane sa*

$$F_1(x,i) = \overline{\text{sg}}(\alpha(x) \ominus i), \; F_2(x,i) = \overline{\text{sg}}(i \ominus \beta(x)).$$

Funkcija F_1 *je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija* $\overline{\text{sg}}$ *i* $f_1 : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *definiranih sa*

$$f_1(x,i) = \alpha(x) \ominus i.$$

Naime, vrijedi

$$f_1(x,i) = M(G(x,i), \; I^{k+1}_{k+1}(x,i)),$$

pri čemu je M modificirano oduzimanje, a $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$G(x,i) = \alpha(x),$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. *Funkcija G je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija pa slijedi daje* f_1 *rekurzivna. Dakle,* F_1 *je rekurzivna funkcija. Analogno se pokaže da je* F_2 *rekurzivna pa zaključujemo da je* $\overline{\Psi}$ *rekurzivna funkcija. Prema tome* Ψ *je r.r.o. funkcija. Za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$ *vrijedi:*

$$\Phi(x) = f(\Psi(x)),$$

pa iz prethodnog korolara slijedi da je Φ *r.r.o. funkcija.*

Bibliografija

[1] Iljazović, Z. (2009.), *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma*, doktorska disertacija, PMF-MO
[2] H. Rogers, *Theory of recursive functions and effective coputability*, McGraw-Hill, 1967.
[3] M. Vuković, *Izračunljivost*, skripta, 2009.

Sažetak

U prvom poglavlju proučavaju se primitvno rekurzivne funkcije i njihova svojstva te se ujedno dokazuje rekurzivnost nekih poznatih uobičajenih funkcija.

U drugom poglavlju uvodi se pojam rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te se dokazuju neke činjenice vezane za te funkcije koje su potrebne u daljnjem dijelu rada. Nadalje, definira se pojam rekurzivnog skupa te se proučavaju neka svojstva takvih skupova.

U trećem poglavlju proučavaju se funkcije oblika $\mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. Za takve funkcije definira se kada su rekurzivne te kada su rekurzivno omeđene. Posebno, proučavaju se tzv. r.r.o. funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. Navode se neki primjeri takvih funkcija te se dokazuju neki rezultati vezani za takve funkcije.

Summary

In first chapter we study primitive recursive functions and their properties. We also proove recursivity of some common examples of functions.

In second chapter we introduce concept of recursive functions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ and we proove some facts related to these functions important for further work. In addition we define recursive sets and study their properties.

In third chapter we study functions $\mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. For these functions we define when they are recursive and when they are recursively bounded. Specially, we study so called r.r.b. functions $\mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. We give examples of such functions and we proove some related results.

Životopis

Ja sam Elvir Baltić rođen 18.8.1989. u Sisku. Osnovnu školu Viktorovac u Sisku sam završio 2004. godine, a Gimnaziju Sisak 2008. godine. Iste godine upisujem preddiplomski studij Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu gdje 2012. postajem prvostupnik matematike. Nakon toga upisujem diplomski studij na istom fakultetu. U slobodno vrijeme čitam knjige, gledam filmove, slušam glazbu i bavim se rekreativno sportom.